Ekstremumi fja više promjenljivih

~~Neop~~ Uslovi ekstremuma

Neka je $u=f(X)$, $X=(x_1,x_2,..,x_n)$ fja definisana na nekom $D\subset R^n$.
Kažemo da fja f u unutrašnjoj tački ~~D tačka~~ $X^0=(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0)\in D$ ima lokalni minimum (maksimum) ako postoji okolina $U(X^0)$ tačke X^0 takva da $f(X^0)\le f(X)$ $\left(f(X^0)\ge f(X)\right)$ $\forall X\in U(X^0)$. (1)

Minimum (maximum) fje f u tački X^0 se naziva strogim ako važi znak stroge nejednakosti.

Teorema 1. (potrebni (neophodni) uslovi ekstremuma)
Ako diferencijabilna fja $u=f(X)$ ima u tački X^0 lokalni ekstremum to u toj tački važe jednakosti:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}=0,\ \dots,\ \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}=0, \qquad (2)$$

tj

$$df(X^0)=0.$$

Tačka $X\in D$ u kojoj važe jednakosti (2) se nazivaju stacionarnim tačkama. Uslovi (2) su neophodni, ali ne i dovoljni da bi u X^0 postojao ekstrem fje f. Na primjer za fju $u=x^4y^3$ tačka $(0,0)$ je stacionarna tačka, ali u toj tački fja nema ekstremuma, jer u njenoj okolini je $u(x,y)-u(0,0)=x^4y^3$ uzima i pozitivne i negativne vrijednosti.

Neka fja $u=f(X)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda. Tu fju predstavimo u okolini tačke X^0 ~~po~~ pomoću Tejlorove formule.

$$f(X)-f(X^0)=df(X^0)+\frac{1}{2!}d^2f(X^0+\theta\Delta X) \qquad (3)$$

$\Delta X=X-X^0$, $0<\theta<1$.

Teorema 2 (dovoljni uslovi ekstremuma).
Neka je X^0 stacionarna tačka dvaput neprekidno diferencijabilne fje f. Ako je $d^2f(X^0)>0$ $\left(d^2f(X^0)<0\right)$ to u X^0 fja f ima strogi lokalni minimum (maximum).

Dokaz. Pošto su u stacionarnoj tački ispunjene jednakosti (2) $\Rightarrow$ ~~po formuli Tej~~ to Tejlorova formula (3) ima oblik

$$f(x)-f(x^0)=\frac{1}{2}d^2f(x^0+\theta\Delta x) \quad (4)$$

Zbog neprekidnosti drugih parcijalnih izvoda fje f postoji okolina tačke x^0 u kojoj diferencijal $d^2f(x)$ ima isti znak~~e~~ kao i diferencijal $d^2f(x^0)$. Prema tome ako je $d^2f(x^0)>0$ $(d^2f(x^0)<0)$ to u dovoljno maloj okolini će biti i $d^2f(x^0+\theta\Delta x)>0$ $(d^2f(x^0+\theta\Delta x)<0)$. Slijedi iz (4) u toj okolini je i $f(x)-f(x^0)>0$ $(f(x)-f(x^0)<0)$ tj. u x^0 fja ima lokalni minimum (maximum) △

Znači, uslovi

$$\begin{aligned} &1)\ df(x^0)=0 \\ &2)\ d^2f(x^0)>0 \quad (d^2f(x^0)<0) \end{aligned} \quad (5)$$

su dovoljni uslovi za postojanje lokalnog min (max) za dvaput nepr.-dif fju f u x^0.

Koristeći Hesovu matricu, diferencijal $d^2f(x^0)$ predstavljamo kao $d^2f(x^0)=(dx)^T H\,dx$, $(dx)^T=(dx_1,dx_2,..,dx_n)$.

~~Odavde slijedi~~

Uvedimo pojam pozitivno (negativno) definitne matrice.

Definicija Simetrična matrica $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn}\end{pmatrix}$ je pozitivno definitna (negativno definitna) ako važi da je $a_{11}>0$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}>0, ..|A|>0$

~~$a_1<0$~~ ~~<0~~

(Silvestrovo pravilo) $\left(a_{11}<0, \ |\quad| >0, \ |\quad| <0, \ldots, (-1)^n|A|>0 \right)$

Odavde slijedi da je $d^2f(x^0)>0$ $(d^2f(x^0)<0)$ ako i samo ako je Hesova matrica pozitivno definitna (negativno) definitna.

Po Silvestrovom pravilu matrica H je pozitivno definitna ako i samo ako je

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_1}>0 \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2\partial x_2}\end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_2\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_3\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_3\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_3\partial x_3}\end{vmatrix}>0$$

$$\ldots \det H\big|_{x=x^0}>0$$

Negativno definitna ako i samo ako je

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1 \partial x_1} < 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} < 0, \dots, (-1)^n \det H\Big|_{x=x^0} > 0$$

Znači dovoljni uslovi lokalnog ~~ekstremuma~~ minimuma (maksimuma) za dvaput NDF f u x^0 su

1) $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} = 0$ 1(6)

2) Hesseova matrica H je pozitivno (negativno) definitna.

Neka je $z = f(x,y)$ dvaput NDF-ja u okolini $M_0 = (x_0, y_0)$. Tada uslovi

1) $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0$

2) matrica $H = \begin{bmatrix} f''_{x^2}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{y^2}(M_0) \end{bmatrix}$ pozitivno (negativno) definitna.

garantuju postojanje u M_0 strogog lokalnog min (max) f-je $f(x,y)$.
Drugim riječima dovoljni uslovi strogog lokalnog min (~~max~~ za f-ju $f(x,y)$ koja ima neprekidne izvode drugog reda u M_0 su

1) $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$

2) $f''_{xx}(M_0) > 0, \ f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - f''^{2}_{xy}(M_0) > 0$,

a dovoljni uslovi strogog lokalnog max su

1) $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$

2) $f''_{xx}(M_0) < 0, \ f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - f''^{2}_{xy}(M_0) > 0$.

Slično za f-ju 3 promjenljive.

Teorema 3 Ako u stacionarnoj tački x^0 diferencijal drugog reda $d^2 f(x^0) = (dx)^T H \, dx$ nije definisan znak to u x^0 lokalni ekstremum ne postoji.

Na primjer za f-ju $z = f(x,y)$ dovoljan uslov nepostojanja ekstremuma u M_0 je $f''_{x^2}(M_0) f''_{y^2}(M_0) - f''^{2}_{xy}(M_0) < 0$.

Примјер Ispitati ekstremume fje $z = 3xy - x^3 - y^3$

Рјешење $z'_x = 3y - 3x^2$ $z'_y = 3x - 3y^2$

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 3y - 3x^2 = 0 \\ z'_y &= 3x - 3y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} & y = x^2 \\ & 3x - 3x^4 = 0 \Rightarrow x(1-x^3) = 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 0$ $y_1 = 0$
$x_2 = 1$ $y_2 = 1$

$M_1 = (0,0)$ $M_2 = (1,1)$ stacionarne tacke.

Hesova matrica za naš sistem je

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} z''_{x^2} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{bmatrix}$$

$H(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\det H(M_1) = -9 < 0$ po teoremi 3 $\Rightarrow$ nema ekstrema u $M_1 = (0,0)$.

u $M_2 = (1,1)$
$H(M_2) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow -6 < 0, \det \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = 27 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ $H(M_2)$ je negativno definitna $\rightarrow$ u $M_2 = (1,1)$ fja ima lokalni maximum

Neophodni uslovi ekstremuma implicitne fje

$z = f(x,y)$ zadate jednacinom $F(x,y,z) = 0$.

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = 0 \quad , \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = 0$$

ili $F'_x(x,y,z) = 0$, $F'_y(x,y,z) = 0$ i naravno $F(x,y,z) = 0$

Znači stacionarne tacke dobijamo iz sistema

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z) = 0 \\ F'_y(x,y,z) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Pitanje karaktera ekstremuma implicitno zadate fje se rešava kao i kod eksplicitne fje.

Ako u stacionarnoj tački x^0 drugi diferencijal ne zadovoljava Silvestrov kriterijum tada postojanje ekstremuma u x^0 ostaje otvoreno. Tada su nam potrebna dodatna ispitivanja.

Apsolutni ekstremum

Neka je funkcija $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ definisana i neprekidna na zatvorenoj ograničenoj oblasti D s granicom Γ i diferencijabilna u svim unutrašnjim tackama te oblasti. Po Vajerštrasovoj teoremi postoje tacke X' i X'' u kojima fja ~~ima~~ f ~~ima~~ dostiže najveću i najmanju vrijednost (apsolutni ekstremum) tj

$$f(X')=\max_{x\in D} f(x)\ ,\quad f(X'')=\min_{x\in D} f(x).$$

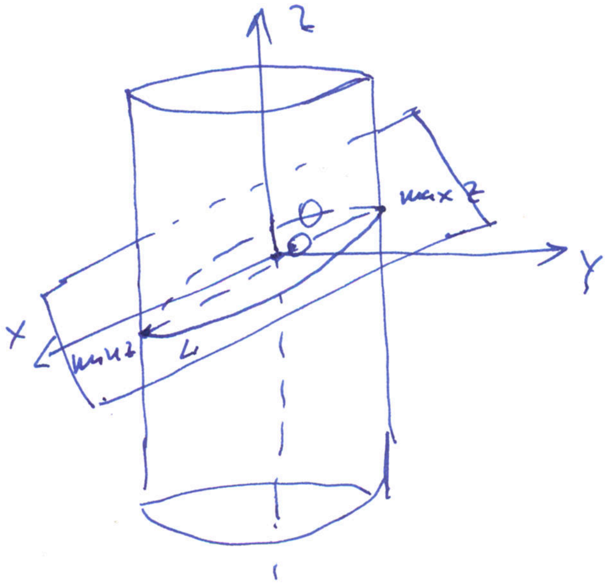
Tacke X' i X'' treba tražiti među stacionarnim tackama fje f unutar oblasti D ili među tackama sa granice Γ. Upoređujući najmanje i najveće vrijednosti fje f u stacionarnim tackama s najvećim i najmanjim vrijednostima s granice Γ traži se ~~tra~~ max i min fje f u oblasti $\overline{D}$.

Uslovni ekstremum

Pojam uslovnog ekstremuma.

Razmotrimo sljedeći zadatak:

Treba naći ekstremum fje $z=ax+by$ pri uslovu da su x i y povezani relacijom $x^2+y^2=R^2$. geometrijski to znači da na liniji presjeka ravni $z=ax+by$ i cilindra ~~z~~ $x^2+y^2=R^2$ treba naći maksimalnu i minimalnu vrijednost aplikate z. Presjek je elipsa L.



Iz jedn. $x^2+y^2=R^2$ nalazimo $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$, $|x|\le R$ uvrstimo nađeno u jednačinu ravni imamo $z=ax\pm b\sqrt{R^2-x^2}$, $|x|\le R$. Tražimo ekstremum fje $z=ax+by$ pri uslovu $x^2+y^2=R^2$ - svelo se na traženje ekstremuma fje $z=ax\pm b\sqrt{R^2-x^2}$ jedne promjenljive x na intervalu $[-R,R]$. koji možemo ispitati poznatim metodama. Po Vajerštrasovoj teoremi ekstremumi ove fje postoje.

Naš problem je specijalni slučaj opštijeg zadatka.
Razmatramo fju $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tražimo ekstremume ove fje pri uslovu da $x_1, x_2, \ldots x_n$ su ograničeni uslovima:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ - \quad - \quad - \quad . \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (1) \qquad (m \le n)$$

(1) su uslovne veze ili uslovi.

Govorićemo da tačka $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ koja zadovoljava jednačine (1) je tačka lokalnog uslovnog max (min) ako postoji okolina $\bar{U}(x$ tačke x^0 takva da $\forall x \in \bar{U}(x^0)$ važi da je

$$f(x) \le f(x^0) \quad \left(f(x) \ge f(x^0) \right).$$

Metod Lagranžovih množitelja

Neka x^0 zadovoljava uslove (1). Pretpostavimo da je u toj tački rang Jakobijeve matrice $\left[\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right]$ jednak m. Možemo smatrati da je minor m-tog reda

$$\left| \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

Tada uzimimo pomoćnu fju

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = L(x, \lambda) =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m F_m(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x) \qquad (3)$$

gdje je $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ neki brojevi.
$L(x, \lambda)$ – Lagranžova fja, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – Lagranžovi množitelji.
$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.

Teorema 1 (neophodni uslovi uslovnog ekstremuma)

Neka su fje $f, F_1, F_2, \dots, F_m$ neprekidno diferencijabilne fje u nekoj okolini tacke $X^0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ koje zadovoljavaju uslove (1). Ako fja f ima ekstremum u X^0 i ako u toj tacki

$$\text{rang}\left[\frac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}\right]=m$$

to tada postoje brojevi $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ takvi da važi

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial x_1} &= \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial F_i}{\partial x_1}(X^0)=0\\
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial x_2} &= \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial F_i}{\partial x_2}(X^0)=0\\
&\;\;- - - - - - - - - -\\
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial x_n} &= \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial F_i}{\partial x_n}(X^0)=0\\
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_1} &= F_1(X^0)=0\\
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_2} &= F_2(X^0)=0\\
&\;\;- - - - - -\\
\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_m} &= F_m(X^0)=0
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

gdje je $\lambda^0=(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ $\triangle$

Tacka $(X^0,\lambda^0)=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ koja zadovoljava (4) se naziva stacionarnom tackom fje L pri uslovima (1).

Da bi našli (X^0,λ^0) treba prvo formirati Lagranžovu fju (3), Riješiti sistem (4) od $n+m$ jednacina s $n+m$ nepoznatih $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m$.

Teorema 2 (dovoljni uslovi ~~ekstremuma~~ ~~[illegible]~~ ~~za uslov~~ uslovnog ekstremuma)

Neka su f i F dvaput neprekidno diferencijabilne fje u okolini stacionarne tacke $(x_0,y_0;\lambda_0)$ Lagranžove fje $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y)$

Tada ako je $\begin{cases} d^2L(x_0,y_0;\lambda_0)<0\\ F(x_0,y_0)=0\end{cases}$ $\left(\begin{aligned} d^2L(x_0,y_0;\lambda_0)>0\\ F(x_0,y_0)=0\end{aligned}\right.$ (5)

to ~~ta~~ u tacki (x_0,y_0) fja $u=f(x,y)$ ima lokalni uslovni maximum (minimum) pri uslovu $F(x,y)=0$.

Primijetimo da dovoljni uslovi (5) f-je f su jednaki sljedećem:

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{F'_x}{F'_y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L''_{xx} & L''_{xy}\\ L''_{yx} & L''_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{F'_x}{F'_y}\end{pmatrix} < 0 \quad \text{uslovni maksimum} \quad (6')$$

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{F'_x}{F'_y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L''_{xx} & L''_{xy}\\ L''_{yx} & L''_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{F'_x}{F'_y}\end{pmatrix} > 0 \quad \text{uslovni minimum.} \quad (6'')$$

Ovo slijedi iz toga što:

$$d^2L = (dx, dy)\begin{pmatrix}L''_{xx} & L''_{xy}\\ L''_{yx} & L''_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix}$$

i pritom je $F'_x dx + F'_y dy = 0$ iz uslova $\underline{F(x,y)=0}$.

odakle $dy = -\frac{F'_x}{F'_y}dx$. Uvrstimo ga u posljednju matričnu jedn. ⇒

$$d^2L = dx^2\begin{pmatrix}1 & -\frac{F'_x}{F'_y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L''_{xx} & L''_{xy}\\ L''_{yx} & L''_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{F'_x}{F'_y}\end{pmatrix}$$

Pošto je $dx^2 > 0$ ⇒ ovo je isto kao uslov (6')

Naše uslove (6') i (6'') možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix}F'_y & -F'_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L''_{xx} & L''_{xy}\\ L''_{yx} & L''_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F'_y\\ -F'_x\end{pmatrix} > 0 \quad (<0) \quad \text{minimum (maximum).}$$

Za tri nezavisne promjenljive dovoljni uslovi ekstremuma su

$\underline{u=f(x,y,z)}$ $\underline{F(x,y,z)=0}$.

Dovoljni uslovi ekstremuma f-je f u stacionarnoj tački $(x_0,y_0,z_0;\lambda_0)$ Lagranžove f-je $L(x,y,z;\lambda)=f(x,y,z)+\lambda F(x,y,z)$ su

Ako je matrica

$$Q = \begin{pmatrix}-F'_z & 0 & F'_x\\ 0 & F'_z & F'_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz}\\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz}\\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-F'_z & 0\\ 0 & -F'_z\\ F'_x & F'_y\end{pmatrix}$$

pozitivno (negativno) definitna, to u tački (x_0,y_0,z_0) f-ja $u=f(x,y,z)$ ima lokalni uslovni minimum (maksimum).

Морамо провјерити довољне услове условног екстремума. (практично занобијање)

$(F_1')_x = 1$, $(F_2')_x = 1$

$(F_1')_y = 2$, $(F_2')_y = -1$

$(F_1')_z = 3$, $(F_2')_z = 2$

$$\left|\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}\right|_{M_0} = \begin{vmatrix} (F_1')_y & (F_1')_z \\ (F_2')_y & (F_2')_z \end{vmatrix}_{M_0} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$\left|\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,z)}\right|_{M_0} = \begin{vmatrix} (F_1)'_x & (F_1)'_z \\ (F_2)'_x & (F_2)'_z \end{vmatrix}_{M_0} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\left|\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}\right|_{M_0} = \begin{vmatrix} (F_1)'_x & (F_1)'_y \\ (F_2)'_x & (F_2)'_y \end{vmatrix}_{M_0} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & +1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ +1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & +1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} = 127 > 0$$

следи Q је позитивно дефинитна матрица и заиста је тачка $M_0 = \left(\frac{19}{59}, \frac{146}{59}, \frac{93}{59}\right)$ ~~тачк~~ тачка која је најближа коорд. почетку

Vli

$$d^2L = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 =$$

$$= 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0 \Rightarrow$$ M_0 је тачка лок. условног минимума

Neka je sada dat problem traženja ekstremuma f-je $u=f(x,y,z)$ uz uslove $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$. tj treba naći ekstremume f-je $u=f(x,y,z)$ u tačkama linije preseka površi $F_1(x,y,z)=0$ i $F_2(x,y,z)=0$

Ako u stacionarnoj tački Lagranžove f-je

$$L(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)=\lambda_1F_1(x,y,z)+\lambda_2F_2(x,y,z)$$

matrica

$$Q=\begin{pmatrix}\left|\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}\right| & -\left|\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,z)}\right| & \left|\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}\right|\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz}\\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz}\\ L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\left|\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}\right|\\ -\left|\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,z)}\right|\\ \left|\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}\right|\end{pmatrix}$$

pozitivno (negativno) definitna to u tački (x_0,y_0,z_0) f-ja $u=f(x,y,z)$ ima uslovni ~~ekstremum~~ minimum (maximum

---

Primer Nađi tačku ~~M koja~~ $M=(x,y,z)$ koja je najbliža koordinatnom početku i koja leži na pravoj $x+2y+3z=10$, $x-y+2z=1$.

Rešenje Treba naći minimum rastojanja $d^2=|OM|^2$ tj treba naći minimum f-je $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ uz uslov da x,y,z zadovoljavaju $F_1(x,y,z)=x+2y+3z-10=0$

$F_2(x,y,z)=x-y+2z-1=0$

~~Nađimo~~ Lagranžova f-ja je

$$L(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+2y+3z-10)+\lambda_2(x-y+2z-1)$$

stacionarne tačke se traže iz sistema jednačina

$$\begin{cases}L'_x=2x+\lambda_1+\lambda_2=0\\ L'_y=2y+2\lambda_1-\lambda_2=0\\ L'_z=2z+3\lambda_1+2\lambda_2=0\\ L'_{\lambda_1}=x+2y+3z-10=0\\ L'_{\lambda_2}=x-y+2z-1=0\end{cases}$$

Rešavajući sistem dobijamo:

$$x_0=\frac{19}{59},\ y_0=\frac{146}{59},\ z_0=\frac{93}{59},\ \lambda_1^0=-\frac{110}{59},\ \lambda_2^0=\frac{72}{59}$$

Treba još da se ubijedimo u to da tačka $M_0=(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{19}{59},\frac{146}{59},\frac{93}{59}\right)$ koja se nalazi na preseku ravni $x+2y+3z-10=0$ i $x-y+2z-1=0$ je najbliža koordinatnom početku.